תאריך הבחינה:	25.8.2024
המרצה:	דר' יקיר ברצ'נקו
שם הקורס:	מודלים של רגרסיה ליניארית
מספר קורס:	364-1-1061
משך הבחינה:	שתי שעות
חומר עזר:	מחשבון, 5 דפי נוסחאות, טבלאות סטטיסטיות

מיועד לתלמידי הנדסת תעשיה וניהול.

שנה: 2024 סמסטר: ב' מועד: ב'

הנחיות חשובות:

א. במבחן זה שלוש שאלות

ב. יש לפתור את כל השאלות, סך הנקודות עשוי להגיע ל108, אך הציון הסופי המקסימלי במבחן הינו 100.

ג. יש ללוות את דרך הפתרון בהסברים מילוליים קצרים

ד. ניתן להשתמש בכל הנוסחאות והתוצאות שפותחו או הוצגו בכיתה ואין צורך להוכיחן מחדש אלא אם כן זה נדרש במפורש

יש לכתוב את כל התשובות במחברת ולא על גיליון המבחן.

<u>שאלה 1 (39 נקודות)</u>

כימאים אספו נתונים לגבי תגובה כימית, ולאחר הרצת רגרסיה לינארית הם קיבלו את התוצאות הבאות עבור המודל:
(שימו לב שחלק מהערכים בפלט נמחקו!)

```
Call:
lm(formula = chem.data$y ~ chem.data$x1 + chem.data$x2 + chem.data$x3
+
    chem.data$x4)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-9.9958 -3.3092 -0.2419  3.3924 10.5668

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   5.89453    4.32508   ???     ???
chem.data$x1 -0.47790    0.34002   ???     ???
chem.data$x2  0.18271    0.01718   ???     ???
chem.data$x3 35.40284   11.09960   ???     ???
chem.data$x4  5.84391    2.90978   ???     ???
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 5.014 on 57 degrees of freedom
Multiple R-squared:  ??,    Adjusted R-squared:  ??
F-statistic: 31.92 on 4 and 57 DF,  p-value: ???
```

א. חשבו את הp-value עבור המקדם של x1. הסבירו את תשובתכם.

ב. חשבו רווח סמך ברמה של 95% עבור המקדם של x1. הסבירו את תשובתכם.

ג. מיצאו את R_{adj}^2. נמקו.

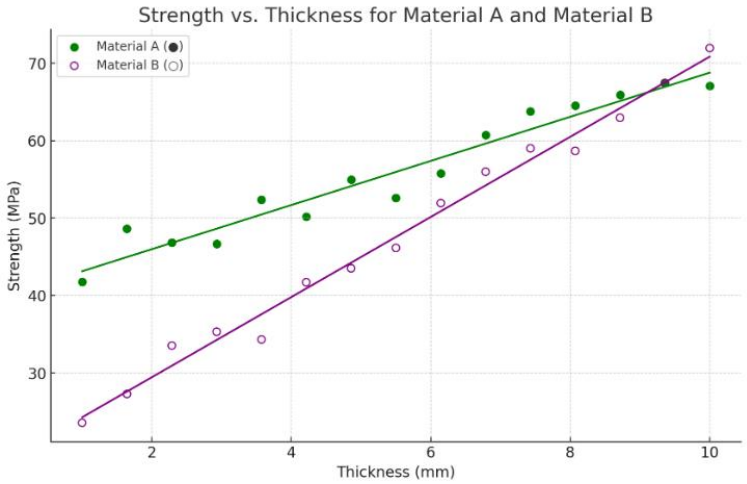
שאלה 2 (39 נקודות)

ענו על הסעיפים הבאים.

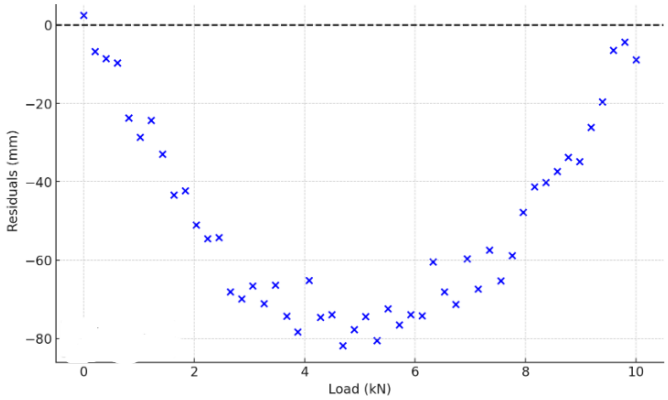
א. עבור הנתונים שבאיור 1, טום רוצה להתאים מודל רגרסיה פשוטה בעל משתנה בלתי-תלוי יחיד ("עובי"). איזה מודל רגרסיה הייתם מציעים על מנת לתאר את התצפיות, וכיצד הייתם משכנעים אותו שאתם צודקים? נסחו את המודל ונמקו בקצרה.

ב. טום לא השתכנע. לתצפיות שבאיור 1 הוא התאים מודל רגרסיה פשוטה בעל משתנה בלתי-תלוי יחיד ("עובי"). כיצד יראה תרשים שאריות מול "עובי"? טום החליט להוסיף תרשים שאריות נוסף: שאריות מול "סוג חומר". כיצד יראה תרשים זה? תארו (רצוי בעזרת שני איורים) את שני התרשימים והסבירו בקצרה.

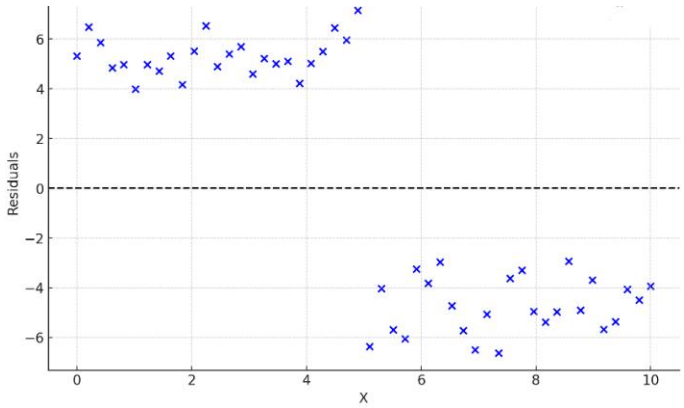
ג. ללא קשר לסעיפים הקודמים. האם האיורים הבאים (איור 2 ואיור 3) יכולים להיות תרשימי שאריות (אחרי רגרסיה פשוטה של y על x)? שניהם יכולים? שניהם לא-יכולים? רק אחד יכול (ומי)? ענו והסבירו את תשובתכם בקצרה.



איור 1.



איור 2.



איור 3.

<u>שאלה 3 (30 נקודות)</u>

השאלה הבאה עוסקת במודל רגרסיה פשוטה **<u>ללא חותך</u>**:

$$y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$$

כאשר כל ε_i בלתי-תלוי באחרים, עם תוחלת 0 ושונות σ^2.

א. ארי ממהר, ולכן הוא מחליט להגדיר אומד לשיפוע, $\widehat{\beta_a}$, אשר משתמש רק בתצפית שנמצאת מול x=1, ז"א רק בתצפית שנסמן בתור $(1, y_1)$. נגדיר את האומד של ארי: $\widehat{\beta_a} = y_1$.
האם האומד חסר-הטיה? מה השונות שלו? הסבירו בקצרה.
ב1. ברי גם ממהר, וגם הוא רוצה להגדיר אומד לשיפוע, $\widehat{\beta_b}$, שמשתמש בתצפית אחת בלבד. בניגוד לארי, ברי רוצה להשתמש רק בתצפית אשר נמצאת מול x=5, ז"א רק בתצפית שנסמן בתור $(5, y_5)$.
כדי שהאומד יהיה חסר-הטיה, איזה אומד הייתם מציעים לברי?
ב2. בהמשך לסעיף ב1', מה השונות של $\widehat{\beta_b}$?
ב3. מבין שני האומדים הקודמים, של ארי ושל ברי, איזה עדיף? נמקו בקצרה.
ג1. שחף טוען ששני האומדים הקודמים אינם יעילים, והוא מציע אומד חדש שמשקלל את שני האומדים הקודמים:

$$\widehat{\beta_s} = a\,\widehat{\beta_a} + b\,\widehat{\beta_b}$$

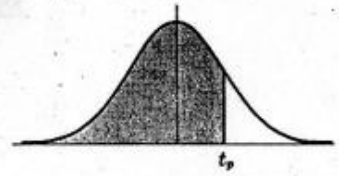
כאשר a ו-b הם שני קבועים כלשהם.
מה צריך לקיים הסכום a+b כדי ש-$\widehat{\beta_s}$ יהיה חסר הטיה?
ג2. עבור $\widehat{\beta_s}$ חסר-הטיה, איזה ערכים כדאי לבחור עבור a ו-b כדי ש-$\widehat{\beta_s}$ יהיה הכי מדויק (ז"א, בעל השונות הקטנה ביותר)?

TABLE

PERCENTILE VALUES (t_p) FOR STUDENT'S t DISTRIBUTION

with n degrees of freedom

(shaded area = p)



n	$t_{.995}$	$t_{.99}$	$t_{.975}$	$t_{.95}$	$t_{.90}$	$t_{.80}$	$t_{.75}$	$t_{.70}$	$t_{.60}$	$t_{.55}$
1	63.66	31.82	12.71	6.31	3.08	1.376	1.000	.727	.325	.158
2	9.92	6.96	4.30	2.92	1.89	1.061	.816	.617	.289	.142
3	5.84	4.54	3.18	2.35	1.64	.978	.765	.584	.277	.137
4	4.60	3.75	2.78	2.13	1.53	.941	.741	.569	.271	.134
5	4.03	3.36	2.57	2.02	1.48	.920	.727	.559	.267	.132
6	3.71	3.14	2.45	1.94	1.44	.906	.718	.553	.265	.131
7	3.50	3.00	2.36	1.90	1.42	.896	.711	.549	.263	.130
8	3.36	2.90	2.31	1.86	1.40	.889	.706	.546	.262	.130
9	3.25	2.82	2.26	1.83	1.38	.883	.703	.543	.261	.129
10	3.17	2.76	2.23	1.81	1.37	.879	.700	.542	.260	.129
11	3.11	2.72	2.20	1.80	1.36	.876	.697	.540	.260	.129
12	3.06	2.68	2.18	1.78	1.36	.873	.695	.539	.259	.128
13	3.01	2.65	2.16	1.77	1.35	.870	.694	.538	.259	.128
14	2.98	2.62	2.14	1.76	1.34	.868	.692	.537	.258	.128
15	2.95	2.60	2.13	1.75	1.34	.866	.691	.536	.258	.128
16	2.92	2.58	2.12	1.75	1.34	.865	.690	.535	.258	.128
17	2.90	2.57	2.11	1.74	1.33	.863	.689	.534	.257	.128
18	2.88	2.55	2.10	1.73	1.33	.862	.688	.534	.257	.127
19	2.86	2.54	2.09	1.73	1.33	.861	.688	.533	.257	.127
20	2.84	2.53	2.09	1.72	1.32	.860	.687	.533	.257	.127
21	2.83	2.52	2.08	1.72	1.32	.859	.686	.532	.257	.127
22	2.82	2.51	2.07	1.72	1.32	.858	.686	.532	.256	.127
23	2.81	2.50	2.07	1.71	1.32	.858	.685	.532	.256	.127
24	2.80	2.49	2.06	1.71	1.32	.857	.685	.531	.256	.127
25	2.79	2.48	2.06	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
26	2.78	2.48	2.06	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
27	2.77	2.47	2.05	1.70	1.31	.855	.684	.531	.256	.127
28	2.76	2.47	2.05	1.70	1.31	.855	.683	.530	.256	.127
29	2.76	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
30	2.75	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
40	2.70	2.42	2.02	1.68	1.30	.851	.681	.529	.255	.126
60	2.66	2.39	2.00	1.67	1.30	.848	.679	.527	.254	.126
120	2.62	2.36	1.98	1.66	1.29	.845	.677	.526	.254	.126
∞	2.58	2.33	1.96	1.645	1.28	.842	.674	.524	.253	.126

טבלת התפלגות F עבור $\alpha = 0.05$

df2/df1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	161.448	199.5	215.707	224.583	230.162	233.99	236.768	238.883	240.543	241.882	243.91	245.95	248.013	249.052	250.095	251.143	252.196	253.253	254.314
2	18.5128	19	19.1643	19.2468	19.2964	19.33	19.3532	19.371	19.3848	19.3959	19.413	19.4291	19.4458	19.4541	19.4624	19.4707	19.4791	19.4874	19.4957
3	10.128	9.552	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855	8.7446	8.7029	8.6602	8.6385	8.6166	8.5944	8.572	8.5494	8.5264
4	7.7086	6.944	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.041	5.9988	5.9644	5.9117	5.8578	5.8025	5.7744	5.7459	5.717	5.6877	5.6581	5.6281
5	6.6079	5.786	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351	4.6777	4.6188	4.5581	4.5272	4.4957	4.4638	4.4314	4.3985	4.365
6	5.9874	5.143	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.099	4.06	3.9999	3.9381	3.8742	3.8415	3.8082	3.7743	3.7398	3.7047	3.6689
7	5.5914	4.737	4.3468	4.1203	3.9715	3.866	3.787	3.7257	3.6767	3.6365	3.5747	3.5107	3.4445	3.4105	3.3758	3.3404	3.3043	3.2674	3.2298
8	5.3177	4.459	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472	3.2839	3.2184	3.1503	3.1152	3.0794	3.0428	3.0053	2.9669	2.9276
9	5.1174	4.257	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373	3.0729	3.0061	2.9365	2.9005	2.8637	2.8259	2.7872	2.7475	2.7067
10	4.9646	4.103	3.7083	3.478	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782	2.913	2.845	2.774	2.7372	2.6996	2.6609	2.6211	2.5801	2.5379
11	4.8443	3.982	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.948	2.8962	2.8536	2.7876	2.7186	2.6464	2.609	2.5705	2.5309	2.4901	2.448	2.4045
12	4.7472	3.885	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964	2.7534	2.6866	2.6169	2.5436	2.5055	2.4663	2.4259	2.3842	2.341	2.2962
13	4.6672	3.806	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144	2.671	2.6037	2.5331	2.4589	2.4202	2.3803	2.3392	2.2966	2.2524	2.2064
14	4.6001	3.739	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458	2.6022	2.5342	2.463	2.3879	2.3487	2.3082	2.2664	2.2229	2.1778	2.1307
15	4.5431	3.682	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876	2.5437	2.4753	2.4034	2.3275	2.2878	2.2468	2.2043	2.1601	2.1141	2.0658
16	4.494	3.634	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377	2.4935	2.4247	2.3522	2.2756	2.2354	2.1938	2.1507	2.1058	2.0589	2.0096
17	4.4513	3.592	3.1968	2.9647	2.81	2.6987	2.6143	2.548	2.4943	2.4499	2.3807	2.3077	2.2304	2.1898	2.1477	2.104	2.0584	2.0107	1.9604
18	4.4139	3.555	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563	2.4117	2.3421	2.2686	2.1906	2.1497	2.1071	2.0629	2.0166	1.9681	1.9168
19	4.3807	3.522	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227	2.3779	2.308	2.2341	2.1555	2.1141	2.0712	2.0264	1.9795	1.9302	1.878
20	4.3512	3.493	3.0984	2.8661	2.7109	2.599	2.514	2.4471	2.3928	2.3479	2.2776	2.2033	2.1242	2.0825	2.0391	1.9938	1.9464	1.8963	1.8432
21	4.3248	3.467	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.366	2.321	2.2504	2.1757	2.096	2.054	2.0102	1.9645	1.9165	1.8657	1.8117
22	4.3009	3.443	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419	2.2967	2.2258	2.1508	2.0707	2.0283	1.9842	1.938	1.8894	1.838	1.7831
23	4.2793	3.422	3.028	2.7955	2.64	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201	2.2747	2.2036	2.1282	2.0476	2.005	1.9605	1.9139	1.8648	1.8128	1.757
24	4.2597	3.403	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002	2.2547	2.1834	2.1077	2.0267	1.9838	1.939	1.892	1.8424	1.7896	1.733
25	4.2417	3.385	2.9912	2.7587	2.603	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821	2.2365	2.1649	2.0889	2.0075	1.9643	1.9192	1.8718	1.8217	1.7684	1.711
26	4.2252	3.369	2.9752	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655	2.2197	2.1479	2.0716	1.9898	1.9464	1.901	1.8533	1.8027	1.7488	1.6906
27	4.21	3.354	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501	2.2043	2.1323	2.0558	1.9736	1.9299	1.8842	1.8361	1.7851	1.7306	1.6717
28	4.196	3.34	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.236	2.19	2.1179	2.0411	1.9586	1.9147	1.8687	1.8203	1.7689	1.7138	1.6541
29	4.183	3.328	2.934	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2783	2.2229	2.1768	2.1045	2.0275	1.9446	1.9005	1.8543	1.8055	1.7537	1.6981	1.6376
30	4.1709	3.316	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107	2.1646	2.0921	2.0148	1.9317	1.8874	1.8409	1.7918	1.7396	1.6835	1.6223
40	4.0847	3.232	2.8387	2.606	2.4495	2.3359	2.249	2.1802	2.124	2.0772	2.0035	1.9245	1.8389	1.7929	1.7444	1.6928	1.6373	1.5766	1.5089
60	4.0012	3.15	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.097	2.0401	1.9926	1.9174	1.8364	1.748	1.7001	1.6491	1.5943	1.5343	1.4673	1.3893
120	3.9201	3.072	2.6802	2.4472	2.2899	2.175	2.0868	2.0164	1.9588	1.9105	1.8337	1.7505	1.6587	1.6084	1.5543	1.4952	1.429	1.3519	1.2539
inf	3.8415	2.996	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799	1.8307	1.7522	1.6664	1.5705	1.5173	1.4591	1.394	1.318	1.2214	1

טבלת F עבור $\alpha = 0.025$

120	60	40	30	24	20	15	12	10	9	8	7	6	5	4	3	2	$df_1=1$	/
1014	1010	1006	1001	997.2	993.1	984.9	976.7	968.6	963.3	956.7	948.2	937.1	921.8	899.6	864.2	799.5	647.8	$df_2=1$
39.49	39.48	39.47	39.47	39.46	39.45	39.43	39.41	39.4	39.39	39.37	39.36	39.33	39.3	39.25	39.17	39	38.51	2
13.95	13.99	14.04	14.08	14.12	14.17	14.25	14.34	14.42	14.47	14.54	14.62	14.73	14.88	15.1	15.44	16.04	17.44	3
8.309	8.36	8.411	8.461	8.511	8.56	8.657	8.751	8.844	8.905	8.98	9.074	9.197	9.365	9.605	9.979	10.65	12.22	4
6.069	6.123	6.175	6.227	6.278	6.329	6.428	6.525	6.619	6.681	6.757	6.853	6.978	7.146	7.388	7.764	8.434	10.01	5
4.904	4.959	5.012	5.065	5.117	5.168	5.269	5.366	5.461	5.523	5.6	5.696	5.82	5.988	6.227	6.599	7.26	8.813	6
4.199	4.254	4.309	4.362	4.415	4.467	4.568	4.666	4.761	4.823	4.899	4.995	5.119	5.285	5.523	5.89	6.542	8.073	7
3.728	3.784	3.84	3.894	3.947	4	4.101	4.2	4.295	4.357	4.433	4.529	4.652	4.817	5.053	5.416	6.06	7.571	8
3.392	3.449	3.505	3.56	3.614	3.667	3.769	3.868	3.964	4.026	4.102	4.197	4.32	4.484	4.718	5.078	5.715	7.209	9
3.14	3.198	3.255	3.311	3.365	3.419	3.522	3.621	3.717	3.779	3.855	3.95	4.072	4.236	4.468	4.826	5.456	6.937	10
2.944	3.004	3.061	3.118	3.173	3.226	3.33	3.43	3.526	3.588	3.664	3.759	3.881	4.044	4.275	4.63	5.256	6.724	11
2.787	2.848	2.906	2.963	3.019	3.073	3.177	3.277	3.374	3.436	3.512	3.607	3.728	3.891	4.121	4.474	5.096	6.554	12
2.659	2.72	2.78	2.837	2.893	2.948	3.053	3.153	3.25	3.312	3.388	3.483	3.604	3.767	3.996	4.347	4.965	6.414	13
2.552	2.614	2.674	2.732	2.789	2.844	2.949	3.05	3.147	3.209	3.285	3.38	3.501	3.663	3.892	4.242	4.857	6.298	14
2.461	2.524	2.585	2.644	2.701	2.756	2.862	2.963	3.06	3.123	3.199	3.293	3.415	3.576	3.804	4.153	4.765	6.2	15
2.383	2.447	2.509	2.568	2.625	2.681	2.788	2.889	2.986	3.049	3.125	3.219	3.341	3.502	3.729	4.077	4.687	6.115	16
2.315	2.38	2.442	2.502	2.56	2.616	2.723	2.825	2.922	2.985	3.061	3.156	3.277	3.438	3.665	4.011	4.619	6.042	17
2.256	2.321	2.384	2.445	2.503	2.559	2.667	2.769	2.866	2.929	3.005	3.1	3.221	3.382	3.608	3.954	4.56	5.978	18
2.203	2.27	2.333	2.394	2.452	2.509	2.617	2.72	2.817	2.88	2.956	3.051	3.172	3.333	3.559	3.903	4.508	5.922	19
2.156	2.223	2.287	2.349	2.408	2.465	2.573	2.676	2.774	2.837	2.913	3.007	3.128	3.289	3.515	3.859	4.461	5.872	20
2.114	2.182	2.246	2.308	2.368	2.425	2.534	2.637	2.735	2.798	2.874	2.969	3.09	3.25	3.475	3.819	4.42	5.827	21
2.076	2.145	2.21	2.272	2.332	2.389	2.498	2.602	2.7	2.763	2.839	2.934	3.055	3.215	3.44	3.783	4.383	5.786	22
2.041	2.111	2.176	2.239	2.299	2.357	2.467	2.57	2.668	2.731	2.808	2.902	3.023	3.184	3.408	3.751	4.349	5.75	23
2.01	2.08	2.146	2.209	2.269	2.327	2.437	2.541	2.64	2.703	2.779	2.874	2.995	3.155	3.379	3.721	4.319	5.717	24
1.981	2.052	2.118	2.182	2.242	2.301	2.411	2.515	2.614	2.677	2.753	2.848	2.969	3.129	3.353	3.694	4.291	5.686	25
1.954	2.026	2.093	2.157	2.217	2.276	2.387	2.491	2.59	2.653	2.729	2.824	2.945	3.105	3.329	3.67	4.266	5.659	26
1.93	2.002	2.069	2.133	2.195	2.253	2.364	2.469	2.568	2.631	2.707	2.802	2.923	3.083	3.307	3.647	4.242	5.633	27
1.907	1.98	2.048	2.112	2.174	2.232	2.344	2.448	2.547	2.611	2.687	2.782	2.903	3.063	3.286	3.626	4.221	5.61	28
1.886	1.959	2.028	2.092	2.154	2.213	2.325	2.43	2.529	2.592	2.669	2.763	2.884	3.044	3.267	3.607	4.201	5.588	29
1.866	1.94	2.009	2.074	2.136	2.195	2.307	2.412	2.511	2.575	2.651	2.746	2.867	3.027	3.25	3.589	4.182	5.568	30
1.724	1.803	1.875	1.943	2.007	2.068	2.182	2.288	2.388	2.452	2.529	2.624	2.744	2.904	3.126	3.463	4.051	5.424	40
1.581	1.667	1.744	1.815	1.882	1.945	2.061	2.169	2.27	2.334	2.412	2.507	2.627	2.786	3.008	3.343	3.925	5.286	60
1.433	1.53	1.614	1.69	1.76	1.825	1.945	2.055	2.157	2.222	2.299	2.395	2.515	2.674	2.894	3.227	3.805	5.152	120

בהצלחה!!!